Nombres complexes

Exercice 10 Polynésie Septembre 2002 Série S

Partie A

1- $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3z_1 + \sqrt{3}z_2 = 2\sqrt{3} \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \\ -2z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} + i - z_2\sqrt{3} = -2i \\ z_1 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{3} + i \\ z_2 = -1 + \dfrac{3}{\sqrt{3}} i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{3} + i \\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i \end{cases}$$

2- $z_A = -\sqrt{3} + i$

$$\left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_A$$

$z_B = -1 + i\sqrt{3}$

$$\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$$

3- $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \left|\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right| = 1$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg z_A - \arg z_B$$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$$

$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{6}\,(2\pi)$$

On a donc $|z_A| = |z_B|$, c'est-à-dire $OA = OB$: le triangle ABO est isocèle en O.

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)$

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\arg z_B-\arg z_A$

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\arg\frac{z_B}{z_A}$

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{\pi}{6}(2\pi)$

4-Soit $C(z)$ un point du plan tel que ACBO soit un losange, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC} \quad &\Leftrightarrow z_A=z-z_B\\
&\Leftrightarrow z=z_A+z_B\\
&\Leftrightarrow z=-\sqrt{3}+i-1+\sqrt{3}i\\
&\Leftrightarrow z=-\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times OC$

$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|z_B-z_A\right|\times\left|z_C\right|$

$A_{ABC}=\frac{\left|-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\right|\left|-\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right|}{2}$

$A_{ABC}=\frac{\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\times\sqrt{\left(-\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2}$

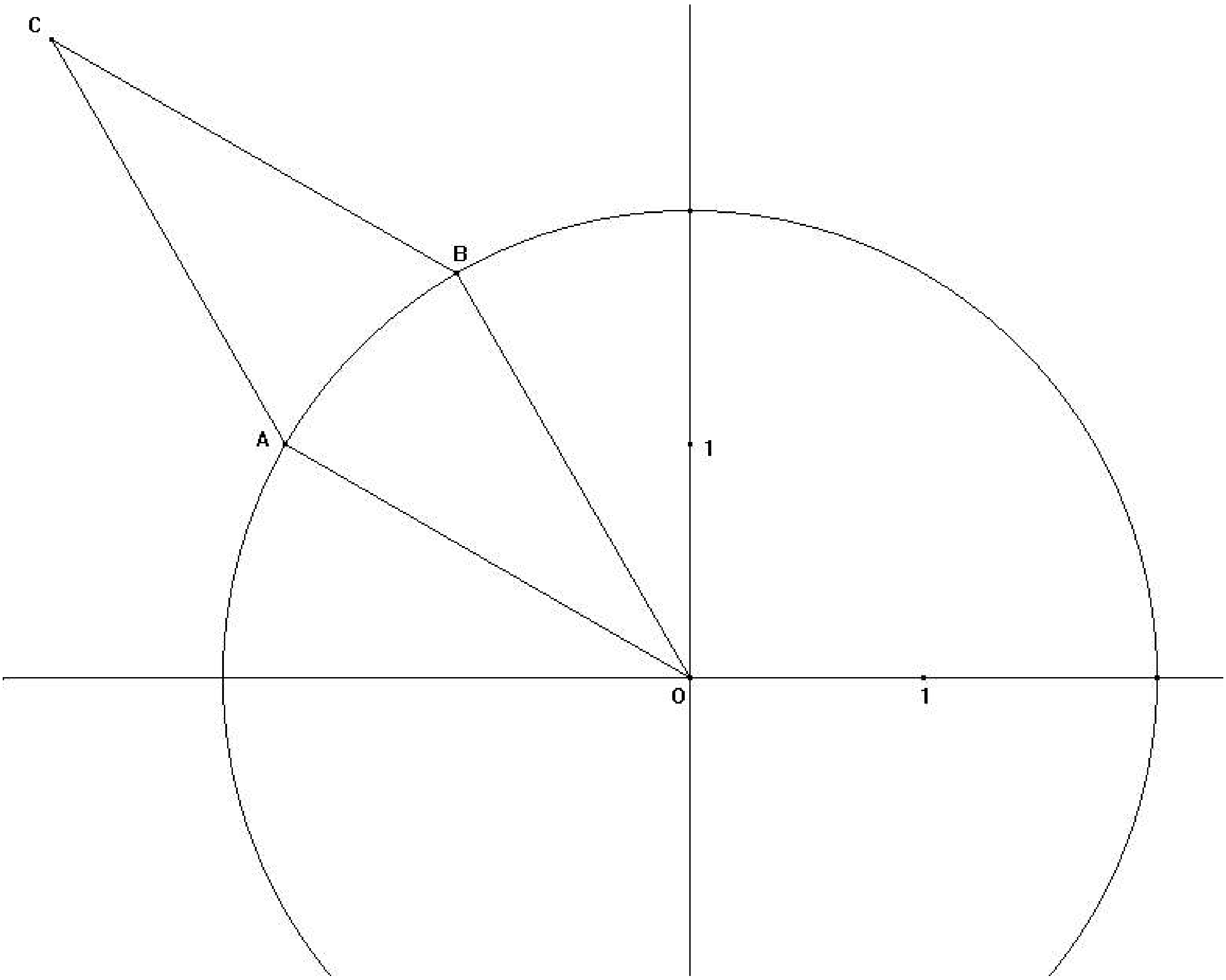
$A_{ABC}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\times\sqrt{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2}$

$A_{ABC}=\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\sqrt{3}+1\right)$

$A_{ABC}=3-1$

$A_{ABC}=2$

L'aire de A_{ABC} est donc de 2 unités, soit $2\times 16=32$ cm².



Partie B

1- f est la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2-

$f(z_A) = e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(-\sqrt{3}+i\right)$

$f(z_A) = e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$

$f(z_A) = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$f(z_A) = 2e^{i\frac{4\pi}{6}}$

$f(z_A) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$A'\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$

$f(z_B) = e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$

$f(z_B) = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$f(z_B) = 2e^{i\frac{3\pi}{6}}$

$f(z_B) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$B'\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

$z_C = z_A + z_B$

$z_C = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}+1}\right)$

$z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$z_C = 2e^{i\frac{9\pi}{12}} \times 2\cos\frac{\pi}{12}$

$z_C = 4\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$f(z_C) = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4\cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(z_C) = 4\cos\frac{\pi}{12} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$f(z_C) = 4\cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$C'\left(4\cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)$$

3- Une rotation conserve les aires, donc on a : $A_{A'B'C'} = A_{ABC} = 32$ cm².