Nombres complexes

Exercice 9 Guadeloupe – Guyane – Martinique Septembre 2002 Série S

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1.

1- Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2- Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de C d'affixe $e^{i\alpha}, \alpha \in [0;2\pi[$.
On considère l'application f qui, à tout point M de C, associe $f(M) = MA \times MB$
a) Montrer, pour tout $\alpha \in IR$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$.
c) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3- a) En utilisant 2- c), montrer qu'il existe deux points M de C, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal.
Donner cette valeur minimale.
b) En utilisant 2- c), montrer qu'il existe un seul point M de C, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.