

Nombres complexes

Exercice 8 France Métropolitaine septembre 2002 Série S

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i .

A tout point M , distinct de A et d'affixe z , est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$

1- a) Calculer l'affixe du point C' associé au point d'affixe $-i$.

b) Placer les points A , B et C .

2- Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.

a) Montrer l'égalité : $Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} i$

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\text{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3- a) Ecrire le nombre complexe $(1-i)$ sous forme trigonométrique.

b) Soit M un point d'affixe z , distinct de A et de B . Montrer que $\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ si, et seulement si, il

existe un entier k tel que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d) Déterminer l'ensemble F des points M vérifiant $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.