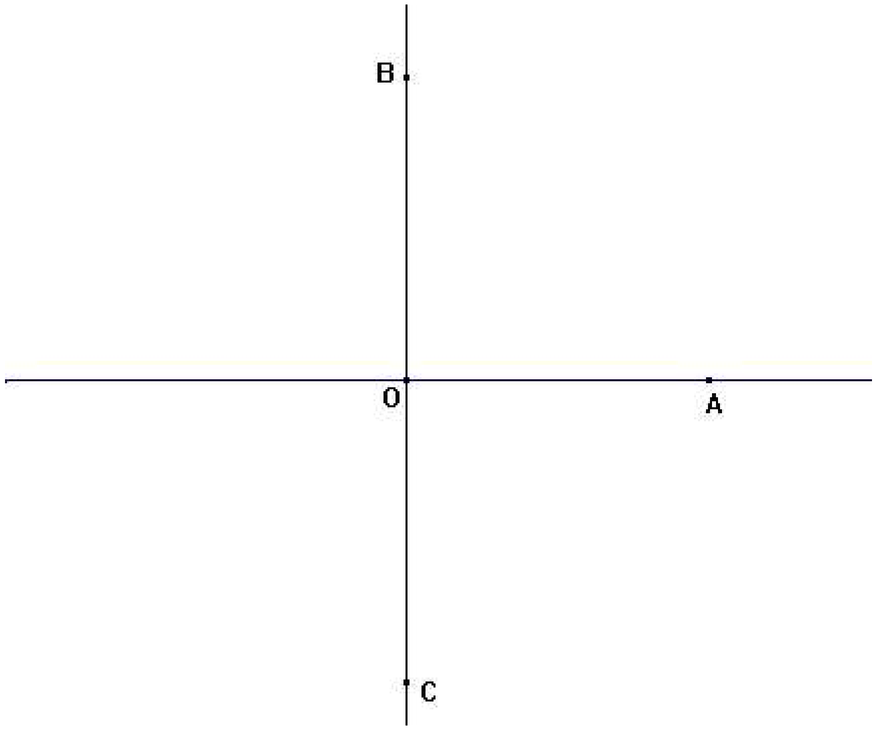
Nombres complexes

Exercice 8 **France Métropolitaine septembre 2002 Série S - Correction**

1- a) Lorsque $z = -i$, $Z = \dfrac{(1-i)(-i-i)}{-i-1} = \dfrac{-2i-2}{-i-1} = \dfrac{2i+2}{i+1} \times \dfrac{i-1}{i-1} = \dfrac{-2-2i+2i-2}{-1-1} = 2$ *C'* a pour affixe 2

b)



2- $\forall z \neq 1,$

$$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$$

$$Z = \frac{(1-i)(x+iy-i)}{x+iy-1}$$

$$Z = \frac{(1-i)(x+i(y-1))}{(x-1)+iy}$$

$$Z = \frac{(1-i)(x+i(y-1))}{(x-1)+iy}$$

$$Z = \frac{(1-i)(x+i(y-1))}{(x-1)+iy} \times \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$Z = \frac{(x+i(y-1)-ix+(y-1))((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(x+(y-1)+i(y-1-x))((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{((x+y-1)(x-1)+y(y-1-x))+i((y-1-x)(x-1)-y(x+y-1))}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{((x-1)^2+y(x-1)+y^2+y(-x-1))+i(y(x-1)-(x+1)(x-1)-y^2-y(x-1))}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{\left((x-1)^2+y^2+y(x-1-x-1)\right)+i\left(-(x^2-1)-y^2\right)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{(x-1)^2+y^2-2y}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2}-\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}i$$

b) Z est un nombre réel si et seulement si $x^2+y^2-1=0$

$x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

E est donc le cercle de centre O, de rayon 1, privé du point A.

c) $\operatorname{Re}(Z)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2-1\leq 0$

$\operatorname{Re}(Z)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\leq 1$

F est donc le disque fermé de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 1, privé du point A.

3- a) $|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

b) Soit $M(z)$ tel que $z\neq 1$ et $z\neq i$. $Z\neq 0$ car $z\neq i$.

$$\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}\in IR^* \Leftrightarrow \exists k\in IR, \arg\left(\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}\right)=0+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in IR, \arg(1-i)(z-i)-\arg(z-1)=0+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in IR, \arg(1-i)+\arg(z-i)-\arg(z-1)=0+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in IR, -\frac{\pi}{4}+(\vec{i},\vec{MB})-(\vec{i},\vec{MA})=0+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in IR, (\vec{MA},\vec{i})+(\vec{i},\vec{MB})=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in IR, (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

c) L'ensemble des points M vérifiant $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{4}+k\pi$ est donc E privé du point B.

d) L'ensemble des points M vérifiant $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ est donc l'ensemble E privé du quart de cercle AB (théorème de l'angle inscrit au centre)