Nombres complexes

Exercice 7 Asie Juin 2002, Série S

1- Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les quatre points, A, B, C et D d'affixes respectives 3, $4i$, $-2+3i$ et $1-i$.
   a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2- On considère dans l'ensemble des complexes les équations :
$z^2-(1+3i)z-6+9i=0 \qquad (1)$
et $z^2-(1+3i)z+4+4i=0 \qquad (2)$
   a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.
   b) Développer $(z-3)(z+2-3i)$, puis $(z-4i)(z-1+i)$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0$
   d) Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.
   e) Déterminer les entiers naturels *n* tels que les points M_n d'affixes $z_0{}^n$ soient sur la droite d'équation $y=x$.

3- On appelle *f* l'application qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que :
$z'=z^2-(1+3i)z-6+9i$.
   a) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$. Exprimer *x'* et *y'* en fonction de *x* et *y*.
   b) Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points *M* pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.