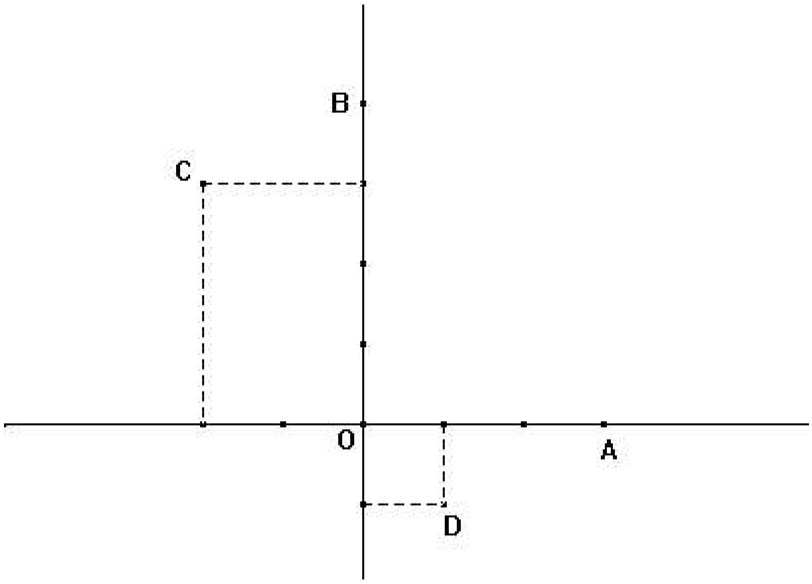
Nombres complexes

Exercice 7 Asie Juin 2002, Série S - correction

1- a)



b) $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}(4i-3)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(4i-3)$ $\quad$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: ABCD est un parallélogramme.

2- a) $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0 \qquad (1)$

Soit $a \in IR$, tel que : $a^2 - (1+3i)a - 6 + 9i = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 6 + i(-3a+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \\ -3a + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

$z_1 = 3$ convient.

$z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0 \qquad (2)$

Soit $b \in IR$, tel que : $(ib)^2 - (1+3i)(ib) + 4 + 4i = 0$

$$\Leftrightarrow -b^2 - ib + 3b + 4 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2 + 3b + 4 + i(-b+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 3b + 4 = 0 \\ -b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = 4$$

$z_2 = 4i$ convient.

b) $(z-3)(z+2-3i)$

$$= z^2 + 2z - 3iz - 3z - 6 + 9i$$
$$= z^2 + (-1-3i)z - 6 + 9i$$

$(z-4i)(z-1+i)$

$$= z^2 - z + zi - 4iz + 4i + 4$$
$$= z^2 + (-1-3i)z + 4i + 4$$

c) $\left(z^2-(1+3i)z-6+9i\right)\left(z^2-(1+3i)z+4+4i\right)=0$

$$\Leftrightarrow (z-3)(z+2-3i)(z-4i)(z-1+i)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ ou \\ z=-2+3i \\ ou \\ z=4i \\ ou \\ z=1-i \end{cases}$$

d) $z_0=1-i$

$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}$

$|1-i|=\sqrt{2}$

$z_0=1-i$

$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_0=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

e)

$z_0^{\ n}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

$z_0^{\ n}=\sqrt{2}^{\,n}e^{-i\frac{\pi}{4}n}$

$z_0^{\ n}=\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$M\left(z_0^{\ n}\right)$ appartient à la droite d'équation $y=x$ si et seulement si $\cos\frac{n\pi}{4}=-\sin\frac{n\pi}{4}$

$\cos\frac{n\pi}{4}=-\sin\frac{n\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4}=\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k\in IR, \frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k\in IR, n\pi=\pi+4k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k\in IR, n=1+4k$

3) $f: M(z)\to M'(z')\,/\,z'=z^2-(1+3i)z-6+9i$

a) $z=x+iy \quad z'=x'+iy'$

$x'+iy'=(x+iy)^2-(1+3i)(x+iy)-6+9i$

$x'+iy'=x^2-y^2+2ixy-(x+iy+3ix-3y)-6+9i$

$x'+iy'=x^2-y^2+2ixy-x-iy-3ix+3y-6+9i$

$x'+iy'=x^2-y^2-x+3y-6+i(2xy-y-3x+9)$

On a donc : $\begin{cases} x'=x^2-y^2-x+3y-6 \\ y'=2xy-y-3x+9 \end{cases}$

b) $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $x'=0$

$$
\begin{aligned}
x'=0 \quad & \Leftrightarrow x^2-y^2-x+3y-6=0 \\
& \Leftrightarrow \left(x^2-x\right)-\left(y^2-3y\right)=6 \\
& \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=6 \\
& \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4 \\
& \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1
\end{aligned}
$$

(H) est donc une hyperbole !