Calculs d'intégrales

Exercice 3 – Orléans 1984

Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in IN^*}$ définie pour tout $n \in IN^*$ par $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1- Calculer I_1.

2- Par une intégration par partie, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 2$.

En déduire que $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$ pour $n \geq 1$.

3- Majorer la fonction $x \to (1-x)^n e^x$ sur l'intervalle $[0;1]$.

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$ et montrer que : $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)$

N.B. : on rappelle les notations suivantes : $0! = 1$; $1! = 1$; $n! = 1\times 2\times 3\times ...\times n$