Calculs d'intégrales – Solutions

Exercice 3 – Orléans 1984

Soit $\left(I_n\right)_{n\in IN^*}$ définie pour tout $n \in IN^*$ par $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1-

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

$$I_1 = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 xe^x dx$$

Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$: intégration par partie

$$u = x \quad v' = e^x$$

$$u' = 1 \quad v = e^x$$

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$\int_0^1 xe^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1$$

$$\int_0^1 xe^x dx = e - e + 1$$

$$\int_0^1 xe^x dx == 1$$

$$I_1 = \left[e^x\right]_0^1 - 1$$

$$I_1 = e - 1 - 1$$

$$I_1 = e - 2$$

2-

$$\forall n \in IN^*,\ I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

Intégration par partie :

$$u = (1-x)^n \qquad v' = e^x$$

$$u' = -n(1-x)^{n-1} \qquad v = e^x$$

On a donc, $\forall n \geq 2$

$$I_n = \frac{1}{n!}\left[(1-x)^n e^x\right]_0^1 - \frac{1}{n!}\int_0^1 -n(1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

On en déduit, en ajoutant membre à membre les égalités suivantes et en simplifiant :

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = -\frac{1}{(n-1)!} + I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_2 = -\frac{1}{2!} + I_1$$

$$I_n = -\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p!} + I_1$$

$$I_n = -\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p!} + e - 2$$

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

3- Soit $f : \begin{cases} [0;1] \to IR \\ x \to (1-x)^n e^x \end{cases}$

f est dérivable sur $[0;1]$ pour tout $n \geq 1$ et on a :

$$\left((1-x)^n e^x\right)' = -n(1-x)^{n-1} e^x + (1-x)^n e^x$$

$$\left((1-x)^n e^x\right)' = (1-x)^{n-1} e^x(-n+1-x)$$

$$\left((1-x)^n e^x\right)' = (1-x)^{n-1} e^x(1-n-x)$$

Or $\begin{cases} \forall x \in [0;1] \quad 1-x-n \leq 0 \\ \forall n \geq 1 \end{cases}$

Donc $\forall x \in [0;1] \quad f'(x) \leq 0$ et f est donc décroissante.

f étant continue, *f* est donc majorée sur $[0;1]$ par $f(0) = 1$. On a donc, pour tout $n \in IN^*$

$$0 \leq I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 dx$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}$$

La suite $(I_n)_{n \in IN^*}$ est donc convergente et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 = \lim_{n\to+\infty}(e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = e$$