Calculs d'intégrales – Solutions

Exercice 1 – Nice 1975

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n \, dx$$

1-

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p \, dx$$

$$I_{p,0} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1$$

$$I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$$

$$I_{p,1} = \int_0^1 x^p (1-x)$$

$$I_{p,1} = \int_0^1 \left(x^p - x^{p+1} \right) dx$$

$$I_{p,1} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+2}}{p+2} \right]_0^1$$

$$I_{p,1} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$I_{p,1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

2-

$$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n \, dx$$

$$I_{0,n} = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$I_{0,n} = \frac{1}{n+1}$$

$$I_{1,n} = \int_0^1 x(1-x)^n \, dx$$

Intégration par partie : $u = x \quad v' = (1-x)^n$; $u' = 1 \quad v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$

$$I_{1,n} = \left[-\frac{x(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} dx$$

$$I_{1,n} = \frac{1}{n+1} \left[-\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1$$

$$I_{1,n} = \frac{1}{n+1} \left(+ \frac{1}{n+2} \right)$$

$$I_{1,n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

3-

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n \, dx$$

Intégration par partie : $u' = x^p \qquad v = (1-x)^n$; $u = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} \qquad v' = -n(1-x)^{n-1}$

$$I_{p,n} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \frac{n}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{n-1} \, dx$$

$$I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$$