Fonctions : logarithmes népériens

Problème Montréal 1978 (Extrait) – correction

Soit $f(x) = x + 2 + \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1- f existe dès que $x - 1 \neq 0$ et $\dfrac{x+1}{x-1} \neq 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\dfrac{x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc $D_f = IR - \{-1;1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

2-

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right|$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1}\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1}\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

La fonction f est continue et dérivable sur D_f, et on a :

$f(x) = x + 2 + \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = x + 2 + \ln|x+1| - \ln|x-1|$.

On a donc :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1) + (x-1) - (x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)}$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$ $+\infty$
x^2-3	+	-	-	-	+
x^2-1	+	+	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+2+\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+2+\ln\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+2+\ln\left(\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}\right)$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+2+\ln\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)\approx 5{,}05$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2+\ln\frac{-\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}-1}$$
$$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2+\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$
$$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2-\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$f\left(-\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$
$$f\left(-\sqrt{3}\right)\approx -1{,}05$$

3- Les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales de C_f (évident, voir calculs limites).

On a d'autre part : $f(x)-(x+2)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

Or, d'après la question précédente, on a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=0$.

On en déduit que la droite d d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à C_f.

Pour déterminer la position de C_f par rapport à d, il faut étudier le signe de $f(x)-(x+2)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, pour tout $x\in D_f$.

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|>0 &\Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right|>1\\ &\Leftrightarrow |x+1|>|x-1|\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2>(x-1)^2\\ &\Leftrightarrow 2x>-2x\\ &\Leftrightarrow 4x>0\\ &\Leftrightarrow x>0\end{aligned}$$

Par conséquent : si $x>0$, C_f est au-dessus de son asymptote d

si $x<0$, C_f est au-dessous de son asymptote d.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f avec d, il faut résoudre : $f(x)-(x+2)=0$

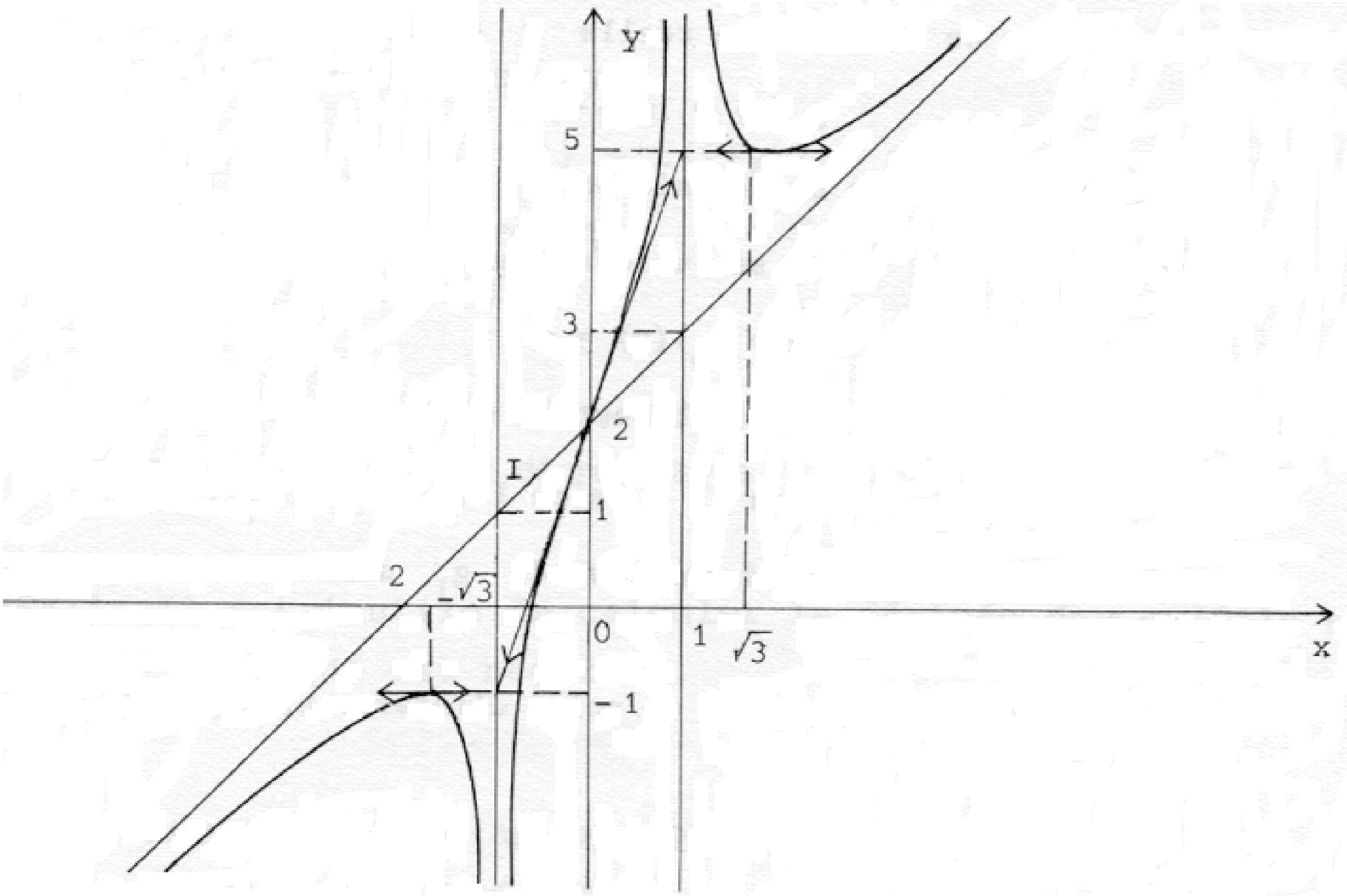
$f(x)-(x+2)=0 \quad \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=0$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\ln 1$

$\Leftrightarrow |x+1|=|x-1|$

$\Leftrightarrow x=0$

Comme $f(0)=2$, en notant $K(0;2)$, on conclut que C_f et d se coupent en K.
(Remarque : $f'(0)=3$ utile pour tracer la courbe !)



4- Montrons que K est le centre de symétrie de C_f.
D_f est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc on a :
$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et :

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{x+2+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+(-x)+2+\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|}{2}$$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{4+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{2}$$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{4+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}{2}$$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=2$$

$K(0;2)$ est bien le centre de symétrie de C_f.