

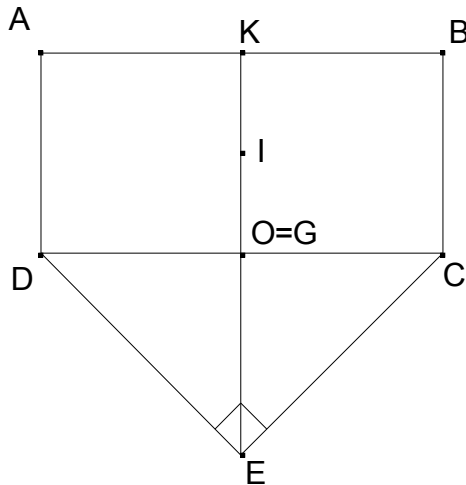
Barycentres : corrections

Exercice 3 : Lyon 1979 Série D

1- Notons O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[AB]$.

Notons I l'isobarycentre de A, B, C et D .

I est le centre du rectangle $ABCD$, c'est-à-dire le milieu de $[OK]$.



G est donc le barycentre de $(I, 4)$ et $(E, 2)$, c'est-à-dire de $(I, 2)$ et $(E, 1)$ (les points I, G, E sont alignés). On a donc :

$$\begin{aligned} 2\vec{GI} + \vec{GE} &= \vec{O} &\Leftrightarrow 2(\vec{GO} + \vec{OI}) + (\vec{GO} + \vec{OE}) &= \vec{O} \\ &&\Leftrightarrow 3\vec{GO} + 2\vec{OI} + \vec{OE} &= \vec{O} \\ &&\Leftrightarrow 3\vec{GO} + \vec{OK} + \vec{OE} &= \vec{O} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [OK]. \end{aligned}$$

Montrons que $\vec{OK} + \vec{OE} = \vec{O}$

Par construction, la droite (OK) est un axe de symétrie du rectangle $ABCD$, donc (OK) et (DC) sont perpendiculaires, ce qui implique que $AKOD$ est un rectangle.

Or, par hypothèse, on a : $AD = \frac{CD}{2}$. Le rectangle $AKOD$ a donc deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un carré. On en déduit que $OK = OD$.

D'autre part, le triangle EDC est par hypothèse rectangle isocèle en E , donc inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[CD]$, ce qui implique que $EO = OD = OK$, d'où l'égalité vectorielle

$$\vec{OK} + \vec{OE} = \vec{O}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2\vec{GI} + \vec{GE} &= \vec{O} &\Leftrightarrow 3\vec{GO} &= \vec{O} \\ &&\Leftrightarrow G &= O \end{aligned}$$

2- Pour tout point M du plan, posons :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2ME^2$$

$$f(M) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{ME}^2$$

$$f(M) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE})$$

$$f(M) = 6\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 + 2\overrightarrow{OE}^2$$

$$f(M) = 6\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{O} + 2a^2 + 2a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2$$

$$f(M) = 6\overrightarrow{MO}^2 + 8a^2$$

$$f(M) = 6MO^2 + 8a^2$$

Le point M appartient à Γ si et seulement si $6MO^2 + 8a^2 = ka^2$, c'est-à-dire si et seulement si

$OM^2 = \frac{k-8}{6}a^2$. On en conclut que :

Si $k < 8$, alors $\Gamma = \emptyset$

Si $k = 8$, alors $\Gamma = \{O\}$

Si $k > 8$, alors Γ est le cercle de centre O et de rayon $a\sqrt{\frac{k-8}{6}}$