Préparation au bac – option obligatoire

Exercice 1 – Polynésie Juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Construction à faire sur l'annexe 1.

1- a) Le point E a pour affixe $Z_E=3+\mathrm{i}$ et le point F a pour affixe $Z_F=1+3\mathrm{i}$.

Placer dans P les points E et F.

1- b) Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{HF};\overrightarrow{HE})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1- c) On désigne par Z_H l'affixe de H.

Montrer que $\left|\frac{3+i-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right|=1$ et que $arg\left(\frac{3+i-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

En déduire que $Z_H=3+3\mathrm{i}$

2- A, B, C et D sont quatre points du plan P (voir figure annexe 1).

2- a) Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{BIA},\widehat{AJD},\widehat{DKC}$ et $\widehat{CLB}$.

Compléter la figure en annexe 1.

2- b) Conjecturer la position relative des droites *(IK)* et *(LJ)* et le rapport des longueurs des segments [*IK*] et [*LJ*].

3- a) On désigne par $a,b\,et\,z_I$ les affixes respectives des points *A, B* et *I.*

Montrer que $\left|\frac{b-z_I}{a-z_I}\right|=1$ et $\left|\frac{b-z_I}{a-z_I}\right|=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

En déduire que $z_I=\frac{ia-b}{i-1}$.

3- b) Avec les points B, C et L d'affixes respectives $b,c\,et\,z_L$, exprimer sans démonstration z_L en fonction de *b* et *c*.

3- c) Avec les points C, D et K d'affixes respectives $c,d\,et\,z_K$, exprimer de même z_K en fonction de *c* et *d.*

Avec les points D, A et J d'affixes respectives $d,a\,et\,z_J$, exprimer de même z_J en fonction de *a* et *d.*

3- d) Montrer que $z_L-z_J=i(z_K-z_I)$.

En déduire que les droites *(JL)* et *(KI)* sont perpendiculaires et que $JL=KI$.

Exercice 2 – Amérique du Nord Juin 2005

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$.

Sa courbe représentative $\mathscr{E}$ est tracée dans le repère orthonormal en annexe 2 (unité graphique 2 cm).

1- a) Etudier la imite de *f* en $+\infty$.

1- b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{E}$.

1- c) Etudier la position relative de $\mathscr{E}$ et Δ.

2- a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=x\mathrm{e}^{-x}+2(1-\mathrm{e}^{-x})$.

2- b) En déduire que, pour tout réel *x* strictement positif, $f'(x)>0$.

2- c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variation de *f.*

3- A l'aide dune intégraion par partie, calculer l'aire exprimée en cm^2, du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{E}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4- a) Déterminer le point A de $\mathscr{E}$ où la tangente à $\mathscr{E}$ est parallèle à Δ.

4- b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Exercice 3 – Amérique du Nord Juin 2005

Le graphique sera a compléter.

Soit la fonction *f* definie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

1- Etudier les variations de *f* sur l'intervalle $[0;2]$.

Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.
2- (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur ℕ par :
$U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = f(U_n)$
$V_0 = 2$ et, pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} = f(V_n)$
2- a) Le graphique donné en annexe 3 représente la fonction *f* sur l'intervalle $[0;2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (U_n) et (V_n) ?
2- b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel *n*, $1 \leqslant V_n \leqslant 2$
Pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} \leqslant V_n$
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel *n*, $1 \leqslant U_n \leqslant 2$
Pour tout entier naturel *n*, $U_n \leqslant U_{n+1}$
2- c) Montrer que pour tout entier naturel *n* : $V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{V_n - U_n}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$
En déduire que, pour tout entier naturel , $V_n - U_n \geq 0$ et $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(V_n - U_n)$
2- d) Montrer que, pour tout entie naturel n, $V_n - U_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
2- e) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers un même réel *α*.
Déterminer la valeur exacte de *α*.

Exercice 4 – France Juin 2006

Partie A

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}$.
a) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{\frac{-x}{4}}}$
b) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$
c) Etudier les variations de la fonction *f*.

Partie B

1- On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population au temps t est notée $g(t)$.
On définit ainsi une fonction *g* de l'intervalle $[0;+\infty[$ dans ℝ.
La variable réelle *t* désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.
Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour *g* une solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = \dfrac{y}{4}$.
a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
2- En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps *t* (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction *u*, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel *t* positif ou nul, où *u'* désigne la fonction dérivée de la fonction *u*.

a) On suppose que, pour tout réel positif *t*, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction *h* définie par $h=\frac{1}{u}$.

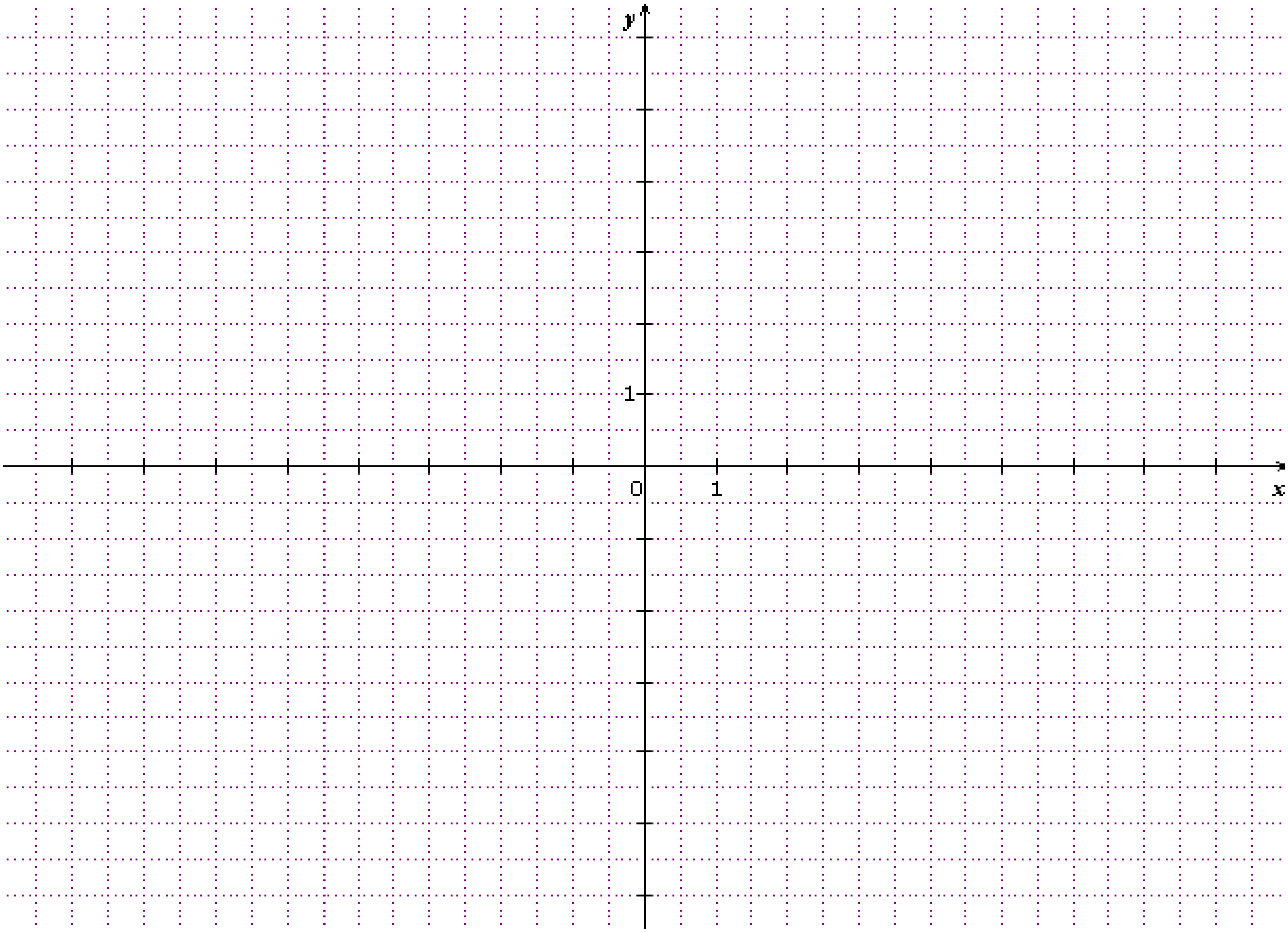
Démontrer que la fonction *u* satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction *h* satisfait aux conditions :

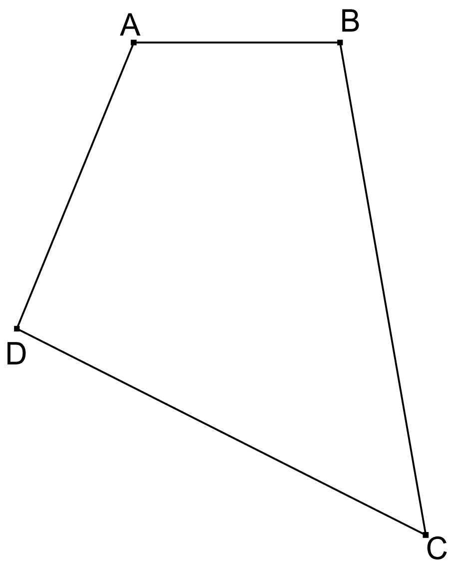
$(E_3):\begin{cases} h'(t)=-\frac{1}{4}h(t)+\frac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$ pour tout nombre réel *t* positif ou nul, où h′ désigne la fonction dérivée de la fonction *h*.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y'=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction *h*, puis celle de la fonction *u*.

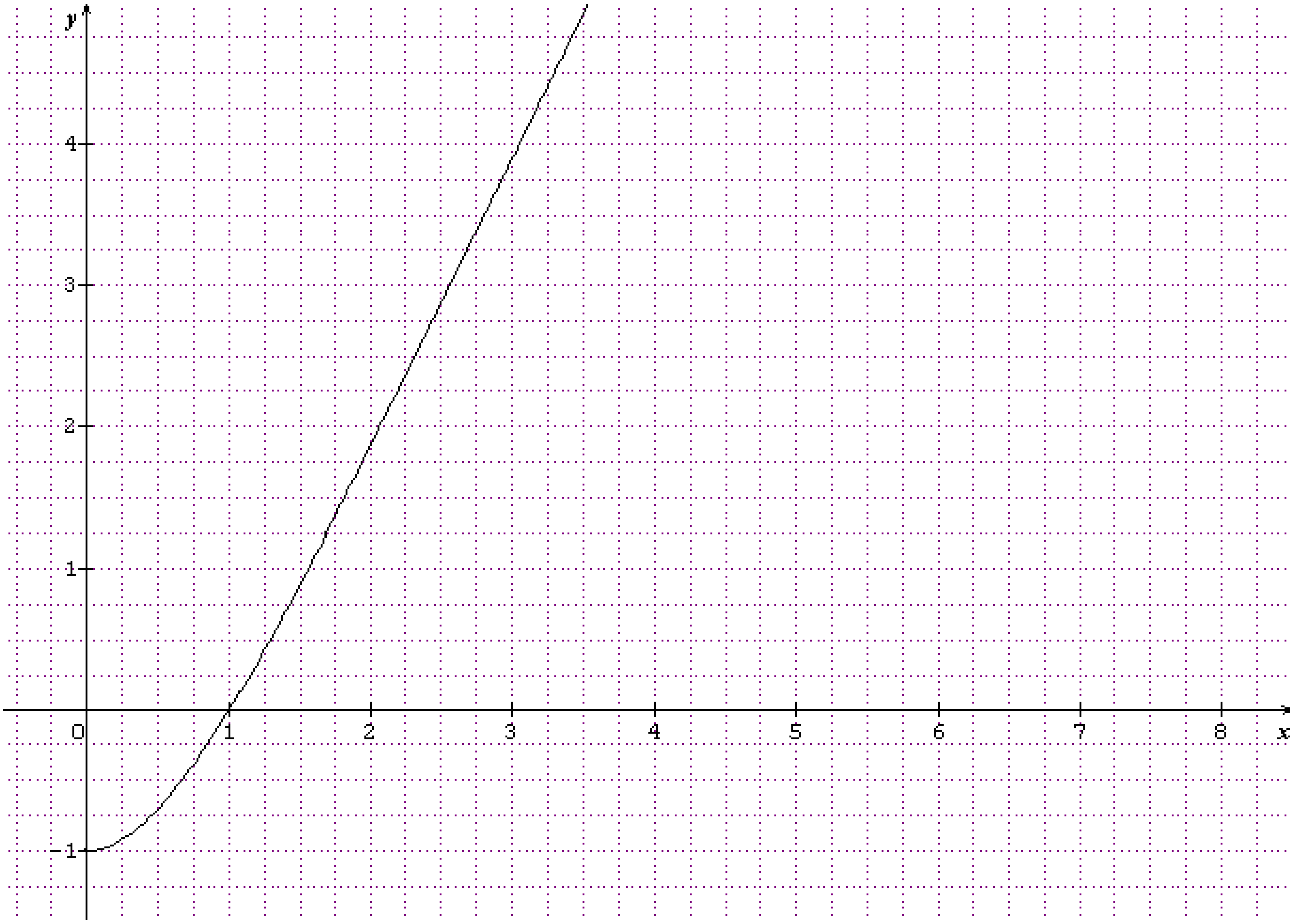
c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque *t* tend vers $+\infty$?

Annexe 1





Annexe 2



Annexe 3