

Classe de 1^{ère} S : géométrie dans l'espace

Exercice 2

1- Calcul des coordonnées des vecteurs.

Rappel : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$$\overrightarrow{AB}(-3;3;1) \quad \overrightarrow{AC}(-2;-3;1) \quad \overrightarrow{AD}(1;2;2)$$

2- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B, C ne sont donc pas alignés. Ils déterminent un plan.

3- Supposons que D appartienne au plan (ABC) . Il existe par conséquent deux réels a et b qui vérifient : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3a - 2b \\ 2 = 3a - 3b \\ 2 = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 3a - 3b \\ 2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3a - 3b \\ 6 = 3a + 3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3a + -3b \\ 8 = 6a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 2 - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$-3a - 2b = -3 \times \frac{4}{3} - 2 \times \frac{2}{3} = -4 - \frac{4}{3} = -\frac{16}{3} \neq 1 : a \text{ et } b \text{ n'existent donc pas ! L'hypothèse « } D$$

appartient au plan (ABC) » est donc absurde.

Les points A, B, C, D ne sont donc pas coplanaires.

4- $\overrightarrow{CD}(3;5;1)$

Montrons que $\overrightarrow{CD}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b qui vérifient : $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3a \\ 5 = a + 4b \\ 1 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} : (CD)$ est donc parallèle au plan (OAB) .

5- Dire « $ABCE$ est un parallélogramme » équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.

On considère $E(x; y; z)$. On a : $\overrightarrow{BC}(1; -6; 0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ y - 1 = -6 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad E \text{ a pour coordonnées } (4; -5; 0)$$