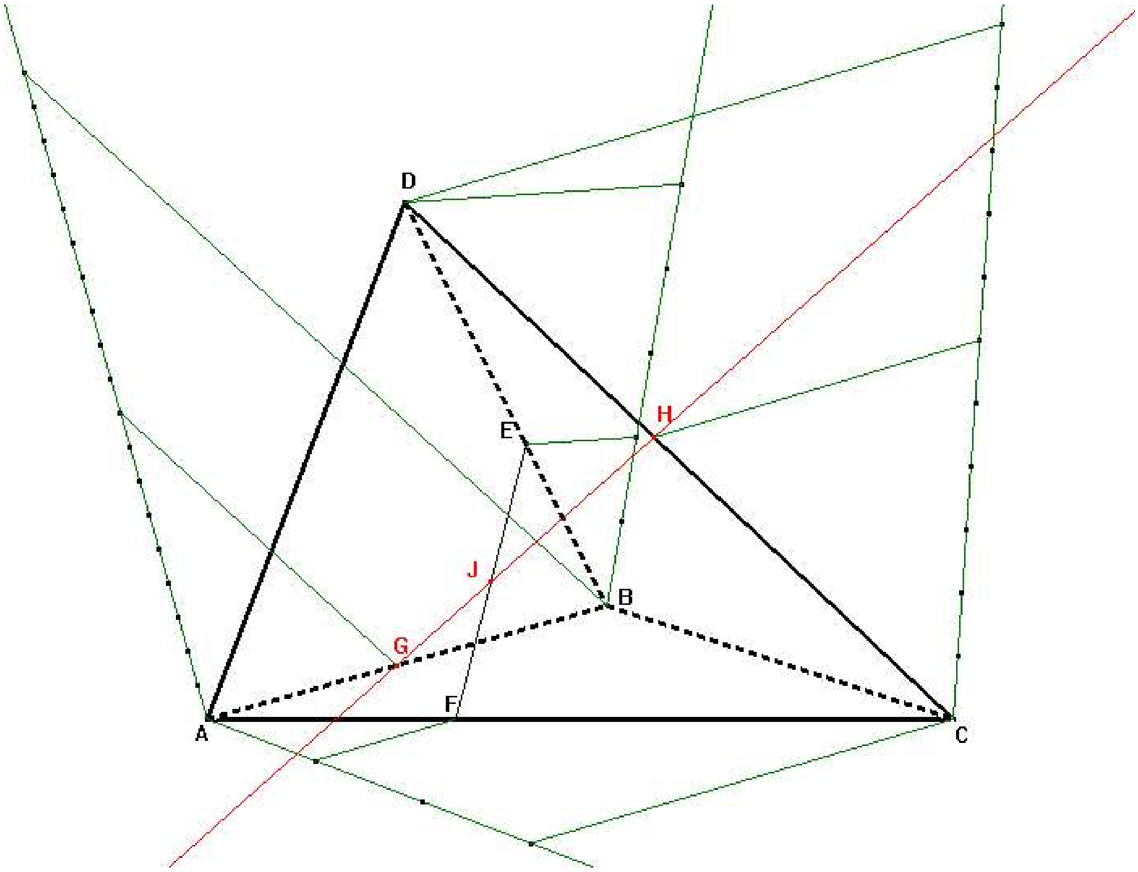
# Classes de 1$^{\text{ère}}$ S : barycentres

## Exercice 4




1- Par définition, on a :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BD} = \vec{O}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{5}\overrightarrow{ED} = \vec{O}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{5}\overrightarrow{ED} = \vec{O}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\overrightarrow{EB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{ED} = \vec{O}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{ED} = \vec{O}$$

$E$ est donc le barycentre de $(B,3)$ et $(D,2)$.

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ | $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{O}$<br>$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FC} = \vec{O}$<br>$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FC} = \vec{O}$<br>$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\overrightarrow{FA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FC} = \vec{O}$<br>$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} = \vec{O}$ |

$F$ est donc le barycentre de $(A,2)$ et $(C,1)$.

2- Soit $K$ le barycentre de $(A,10)$, $(B,9)$, $(C,5)$, $(D,6)$ ($K$ existe car $10+9+5+6=30\neq 0$). Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
10\overrightarrow{KA}+9\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}+6\overrightarrow{KD}=\vec{O} \quad &\Leftrightarrow 10\overrightarrow{KA}+5\overrightarrow{KC}+9\overrightarrow{KB}+6\overrightarrow{KD}=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 5\left(2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}\right)+3\left(3\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KD}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 5\left(2\overrightarrow{KF}+2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FC}\right)+3\left(3\overrightarrow{KE}+3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{KE}+2\overrightarrow{ED}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 5\left(3\overrightarrow{KF}+2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}\right)+3\left(5\overrightarrow{KE}+3\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{ED}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 15\overrightarrow{KF}+15\overrightarrow{KE}=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 15\left(\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KE}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KE}=\vec{O}
\end{aligned}$$

$K$ est donc le milieu de $[EF]$ : les points $K$ et $J$ sont donc confondus.

3- Soit $G$ le barycentre de $(A,10)$ et $(B,9)$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
10\overrightarrow{GA}+9\overrightarrow{GB}=\vec{O} \quad &\Leftrightarrow 10\overrightarrow{GA}+9\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 19\overrightarrow{GA}+9\overrightarrow{AB}=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{9}{19}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Soit $H$ le barycentre de $(C,5)$ et $(D,6)$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
5\overrightarrow{HC}+6\overrightarrow{HD}=\vec{O} \quad &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HC}+6\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CD}\right)=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow 11\overrightarrow{HC}+6\overrightarrow{CD}=\vec{O}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{CH}=\frac{6}{11}\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

$J$ est le barycentre de $(A,10)$, $(B,9)$, $(C,5)$, $(D,6)$
Or $G$ est le barycentre de $(A,10)$ et $(B,9)$ et $H$ est le barycentre de $(C,5)$ et $(D,6)$.
Donc $J$ est le barycentre de $(G,19)$ et $(H,11)$ : les points $G$, $J$ et $H$ sont alignés.

4-

$$\begin{cases} J\in(ABJ) \\ G\in(ABJ) \end{cases} \quad \text{donc } (JG)\in(ABJ)$$

$$\begin{cases} J\in(CDJ) \\ H\in(CDJ) \end{cases} \quad \text{donc } (JH)\in(CDJ)$$

Or G, J, H sont alignés donc les droites *(JG)* et *(JH)* sont confondues.
On en déduit que l'intersection des plans $(ABJ)$ et $(CDJ)$ est la droite *(JG)*.

5- a)

$$\begin{aligned}
\left\|9\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|10\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}\right\| \quad &\Leftrightarrow \left\|9\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)+6\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{ED}\right)\right\|=\left\|10\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}\right)+5\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC}\right)\right\|\\
&\Leftrightarrow \left\|15\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|15\overrightarrow{MF}\right\|\\
&\Leftrightarrow ME=MF
\end{aligned}$$

L'ensemble de points cherché est donc la médiatrice du segment $[EF]$.

b)

$$\left\|10\overrightarrow{MA}+9\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=120 \quad \Leftrightarrow \left\|10\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}\right)+9\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)+5\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)+6\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}\right)\right\|=\overrightarrow{O}$$

$$\Leftrightarrow \left\|30\overrightarrow{MJ}\right\|=120$$

$$\Leftrightarrow MJ=\frac{120}{30}$$

$$\Leftrightarrow MJ=4$$

L'ensemble de points cherché est donc le cercle de centre *J*, de rayon 4 unités.