Classe de 1ère S : barycentres

Exercice 3

1- Rappel du calcul des coordonnées d'un vecteur : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

$x_{\overrightarrow{AC}} = 2x_{\overrightarrow{AB}}$ mais $y_{\overrightarrow{AC}} = y_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

L'affirmation « les points *A, B, C* sont alignés » est fausse.

2- Soit *G* le barycentre des points $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$. Par définition, on a donc :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{O} \quad &\Leftrightarrow 2\left(\vec{GO} + \vec{OA}\right) - \left(\vec{GO} + \vec{OA}\right) + 3\left(\vec{GO} + \vec{OC}\right) = \vec{O} \\
&\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{O} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

On a donc :

$x_G = \frac{1}{2}x_A - \frac{1}{4}x_B + \frac{3}{4}x_C$ $\qquad$ $y_G = \frac{1}{2}y_A - \frac{1}{4}y_B + \frac{3}{4}y_C$ $\qquad$ $z_G = \frac{1}{2}z_A - \frac{1}{4}z_B + \frac{3}{4}z_C$

$x_G = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ $\qquad$ $y_G = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ $\qquad$ $z_G = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$

$x_G = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $y_G = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $z_G = -1$

G a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};-1\right)$

L'affirmation « le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right)$ » est donc fausse.

3- $\overrightarrow{AD}(-4;1;-5)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

Supposons que $\overrightarrow{AD}$ s'écrive comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire qu'il existe *a* et *b* vérifiant $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -a - 2b \\ 1 = a + b \\ -5 = a - b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -a - 2b \\ 1 = a + b \\ 2a = -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Les points *A, B, C* et *D* sont donc coplanaires.

L'affirmation « les points *A, B, C* et *D* sont coplanaires » est donc vraie.